Departamento de Matemática Aplicada a los Recursos Naturales
E.T.S.I. de MONTES - U.P.M

Primer Examen Parcial de Álgebra Lineal 9 de Febrero de 2004

Problema 1. a) Resuelve el sistema matricial $A \cdot X = B$, según los valores de $a \in \mathbb{R}$, para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 1 & -a \\ -3 & 0 & a \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ -6 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Resuelve el sistema lineal de ecuaciones $A \cdot X = B$, según los valores de $a \in \mathbb{R}$, para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 1 & -a \\ -3 & 0 & a \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Problema 2. Sean C_A y C_B, respectivamente, los conjuntos de soluciones de las ecuaciones homogéneas $A \cdot X = O$ y $B \cdot X = O$ con $O \in \mathbb{R}^4$ y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Prueba que C_A es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.
b) Obtén razonadamente una base de un suplementario de $C_A \cap C_B$.

Problema 3. Una empresa de desarrollo forestal planea invertir en la plantación de tres tipos de árbol: Pino de Monterrey (*Pinus radiata*), Eucalipto (*Eucaliptus globulus*) y Álamo Negro (*Populus nigra*). La plantación y desarrollo de cada uno de estos árboles requiere respectivamente 20, 30 y 10 m^2 y la empresa dispone de 170000 m^2 de terreno, no contemplando la posibilidad de dejar parte de ellos en barbecho.

Las plantaciones requieren anualmente los siguientes recursos: Por cada Pino de Monterrey, 5 horas/hombre y 3 horas/máquina; por cada Eucalipto, 4 horas/hombre y 5 horas/máquina y por cada Álamo Negro, 1 hora/hombre y 1 hora/máquina. Por razones de disponibilidad de recursos no pueden ser superadas anualmente las 26000 horas/hombre ni las 25000 horas/máquina.

Sabiendo que los beneficios que pueden ser obtenidos por la venta de la madera producida suponen 5 unidades monetarias (u.m.) por cada Pino de Monterrey, 5 u.m. por cada Eucalipto y 1 u.m. por cada Álamo Negro, averigua cuántos árboles de cada especie deben ser plantados para maximizar el beneficio, así como el beneficio máximo alcanzable.

Problema 4. a) [**8 Ptos.**] Determina las matrices en las correspondientes bases canónicas, de sendas aplicaciones lineales $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, tales que verifiquen simultáneamente

$$
\begin{gathered}
h = g \circ f \\
(g \circ f)(0,1,0) = (0,1,0) \\
(1,1,1,0) \in \operatorname{Im} f \\
\dim \ker g = 2 \\
g(1,0,0,1) = (1,1,1) \\
\dim \operatorname{Im} h = 1 \\
(1,0,1,0) \in \ker g \\
f(-1,1,0) = (0,1,0,0) \\
\dim \operatorname{Im} f = 2.
\end{gathered}
$$

b) [**2 Ptos.**] Razona si existen $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, tales que se verifiquen simultáneamente todas las condiciones anteriores, excepción hecha de la última que se sustituye por $\dim \operatorname{Im} f = 3$.

- Cada ejercicio debe responderse en hojas separadas.
- Se acompañarán los cálculos efectuados para resolver cada problema.
- No está permitido el uso de libros, calculadoras o apuntes.
- El examen deberá efectuarse en un tiempo máximo de **3 horas**.